Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007 Clasa a XII-a

Subiectul I

Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

a) Demonstraţi că f este indefinit derivabilă şi

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) \mathrm{d}t,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0.$$

b) Demonstraţi că $|f^n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$.

Subiectul II (Gazeta Matematică)

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, funcţiile

$$g_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ g_n(x) = \int_0^1 \min\{x, t^n\} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

a) Arătaţi că funcţia g_1 este de două ori derivabilă pe intervalul $[0, 1]$ şi $g_1''(x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$.

b) Daţi exemplu de funcţie f pentru care g_2 nu este de două ori derivabilă în 0.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, unde $x \in [0, 1]$.

Subiectul III

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu proprietatea: mulţimea ordinelor elementelor sale este formată din n numere consecutive, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Arătaţi că grupul este comutativ dacă şi numai dacă $n = 2$.

b) Arătaţi că dacă $n \geq 3$ atunci singurul element $a \in G$ care îndeplineşte condiţia: $ax = xa$, $\forall x \in G$ este elementul neutru.

Subiectul IV

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ şi $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu n elemente, care nu este corp.

a) Demonstraţi că funcţia $u : A \to A$, $u(x) = 0$ pentru $x \neq 0$ şi $u(0) = 1$ nu este polinomială.

b) Demonstraţi că numărul P al funcţiilor polinomiale $f : A \to A$ verifică relaţia

$$n^2 \leq P \leq n^{n-1}.$$

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore